Modul 2: Metode Model Kombinatorik

Pendahuluan metode kombinatorik

• Metode validasi kombinatorik adalah semacam teknik analitik / numerik dan dapat digunakan untuk model keandalan dan ketersediaan dibawah asumsi tertentu.

• asumsi adalah kerusakan komponen yang tidak tergantung dan untuk ketersediaan , perbaikan adalah tidak tergantung (bebas).

• ketika asumsi tetap, formula sederhana untuk keandalan dan ketersediaan terlihat keberadaannya.

Reliability

• salah satu kunci untuk membangun sistem yang tersedia dengan menggunakan komponen yang bisa diandalkan dan sistem yang bisa diandalkan.

• Reliability : sistem reliablity pada waktu t (R(t)) adalah kemungkinan yang mana operasi sistem adalah interval throughput proper (pasti) [0,t].

• teori probabilitas dan kombinatorik dapat diaplikasikan secara langsung untuk model reliablity (nyata).

• X adalah sebuah variabel random merepresentasikan waktu kerusakan komponen. Reliablity komponen pada waktu t diberikan dengan :

$Rx(t) = P[X>t] = 1 – P[X<=t] = 1 – Fx(t)$.

• Dengan cara yang sama, kita dapat mendifinisikan unrealibility pada waktu t dengan :

$Ux(t) – P[X <= t] = Fx(t)$

Tingkat (kecepatan) kerusakan

Apa yang dimaksud dengan tingkat kegagalan komponen pada waktu t ? Ini kemungkinan bahwa sebuah komponen yang tidak gagal dalam interval (t, t + Δt), dimana Δt → 0.

Note that we are not looking at $P[X \in (t, t + \Delta t)] = f_X(t)$. Rather, we are seeking $P[X \in (t, t + \Delta t) | X > t]$.

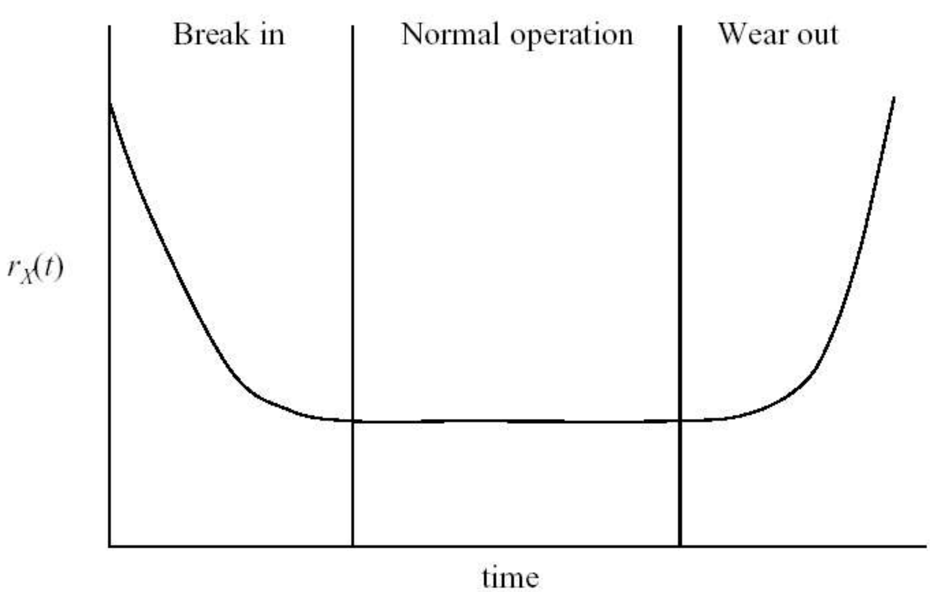
$$P[X \in (t, t+\Delta t) \mid X > t] = \frac{P[X \in (t, t+\Delta t), X > t]}{P[X > t]}$$

$$= \frac{P[X \in (t, t+\Delta t)]}{1 - F_X(t)}$$

$$= \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)} = r_X(t)$$

$r_X(t)$ is called the *failure rate* or *hazard rate*.

Tipical Kecepatan Kerusakan



Sementara Fx dapat memberikan keandalan sebuah komponen, bagaimana dengan keandalan sistem ?

Kerusakan sistem dapat terjadi ketika satu, semua atau beberapa komponen rusak. Jika salah satu membuat asumsi kerusakan independen (bebas), kerusakan sistem dapat dihitung sangat mudah. Kondisi asumsi kerusakan independent yang mana semua kerusakan komponen dari sebuah sistem adalah independent, misal kerusakan salah satu komponen tidak menyebabkan komponen yang lain menjadi lebih rusak.

Asumsi, salah satunya dapat menentukan:

1. waktu kerusakan minimum dari sebuah gabungan komponen
2. Waktu kerusakan maksimum dari sebuah gabungan komponen
3. Kemungkinan bahwa k dari N komponen telah rusak pada waktu t tertentu.

Maksimum dari waktu n kerusakan independent

X1………Xn adalah waktu kerusakan komponen independent. Memperkirakan sistem rusak pada waktu S jika semua komponen rusak.

Thus, $S = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$

What is $F_s(t)$?

$$
\begin{aligned}
F_s(t) &= P[S \le t] \\
&= P[X_1 \le t \text{ AND } X_2 \le t \text{ AND } \ldots \text{ AND } X_n \le t] \\
&= P[X_1 \le t]\, P[X_2 \le t] \ldots P[X_n \le t] && \text{By independence} \\
&= F_{X_1}(t) F_{X_2}(t) \ldots F_{X_n}(t) && \text{By definition} \\
&= \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t)
\end{aligned}
$$

Waktu minimum dari n kerusakan komponen independent

Let $X_1, \ldots, X_n$ be independent component failure times. A system fails at time S if any of the components fail.

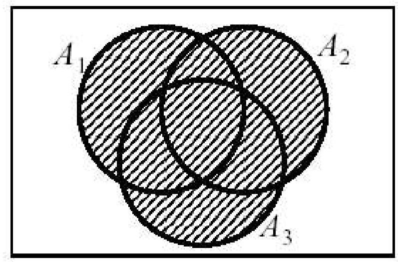
Thus, $S = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

What is $F_S(t)$?

$$F_S(t) = P[S \le t] = P[X_1 \le t \text{ OR } X_2 \le t \text{ OR } \ldots \text{ OR } X_n \le t]$$

Trick : If A_i is an event, and $\overline{A}_i$ is the set complement such that $A_i \cup \overline{A}_i = \Omega$ and $A_i \cap \overline{A}_i = \varnothing$, then

$$P[A_1 \text{ OR } A_2 \text{ OR} \ldots \text{OR } A_n]$$
$$= 1 - P[\overline{A}_1 \text{ AND } \overline{A}_2 \text{ AND} \ldots \text{AND } \overline{A}_n]$$



This is an application of the law of total probability (LOTP).

$$\begin{aligned} F_s(t) &= P[X_1 \le t \text{ OR } X_2 \le t \text{ OR} \ldots \text{OR } X_n \le t] \\ &= 1 - P[X_1 > t \text{ AND } X_2 > t \text{ AND} \ldots \text{AND } X_n > t] && \text{By trick} \\ &= 1 - P[X_1 > t]\, P[X_2 > t] \ldots P[X_n > t] && \text{By independence} \\ &= 1 - (1 - P[X_1 \le t])(1 - P[X_2 \le t]) \ldots (1 - P[X_n \le t]) && \text{By LOTP} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{X_i}(t)) \end{aligned}$$

K dari N

Let $X_1, \ldots, X_n$ be component failure times that have identical distributions (i.e., $F_{X_1}(t) = F_{X_2}(t) = \ldots$). The system fails at time S if k of the N components fail.

$$\begin{aligned} F_S(t) &= P[\underline{\text{at least}}\ k \text{ components failed by time } t] \\ &= P[k \text{ failed OR } k+1 \text{ failed OR} \ldots \text{OR } N \text{ failed}] \\ &= P[k \text{ failed}] + P[k+1 \text{ failed}] + \ldots + P[N \text{ failed}] \end{aligned}$$

- by independence and axiom of probability.

What is P[exactly k failed]?

$$= P[k \text{ failed and } (N - k) \text{ have not}]$$

$$= \binom{N}{k} F_X(t)^k (1 - F_X(t))^{N-k}$$

where $F_X(t)$ is the failure distribution of each component.

Thus,

$$F_S(t) = \sum_{i=k}^{N} \binom{N}{i} F_X(t)^i (1 - F_X(t))^{N-i}$$

K dari N secara umum

Untuk kerusakan terdistribusi yang tidak teridentifikasi, kita harus menambahkan semua kombinasi paling sedikit k kerusakan.

Let G_k be the set of all subsets of $\{X_1, \ldots, X_N\}$ such that each element in G_k is a set of size at least k, i.e.,

$$G_k = \{g_i \subseteq \{X_1, \ldots, X_N\} : |g_i| \geq k\}.$$

The set G_k represents all the possible failure scenarios.

Now F_S is given by

$$F_S(t) = \sum_{g \in G_k} \left(\prod_{X \in g} F_X(t) \right) \left(\prod_{X \notin g} (1 - F_X(t)) \right)$$

Membangun blok komponen

Sistem yang kompleks dapat dianalisa secara hirarki.

Contoh : sebuah komputer rusak jika ada kegagalan power supply atau memori atau kegagalan CPU.

$$F_S(t) = 1 - (1 - F_{P1}(t)F_{P2}(t))(1 - F_{M1}(t)F_{M2}(t))(1 - F_C(t))$$

Ringkasan

Sebuah sistem terdiri dari N komponen dimana waktu kerusakan komponen diberikan oleh variabel random X1,……………….,Xn. Kegagalan sistem pada waktu S dengan distribusi Fs jika :

Condition:	Distribution:
all components fail	$F_S(t) = \prod_{i=1}^{N} F_{X_i}(t)$
one component fails	$F_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^{N} \left(1 - F_{X_i}(t)\right)$
k components fail, identical distributions	$F_S(t) = \sum_{i=k}^{N} \binom{N}{i} F_X(t)^i \left(1 - F_X(t)\right)^{N-i}$
k components fail, general case	$F_S(t) = \sum_{g \in G_k} \left(\prod_{X \in g} F_X(t) \right) \left(\prod_{X \notin g} (1 - F_X(t)) \right)$

Bentuk Formal Keandalan (Reliability)

Beberapa bentuk grafik formal yang terkenal untuk mengekspresikan keandalan sistem. Pokok penyelesaian adalah dengan metode yakni dengan mengujinya. Selanjutnya kami akan menguji :

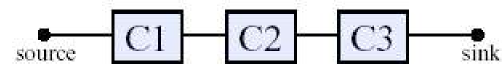
- Reliability Block Diagrams
- Fault Trees
- Reliability Graphs

Reliability Block Diagrams

- Blocks represent components.
- A system failure occurs if there is no path from source to sink.

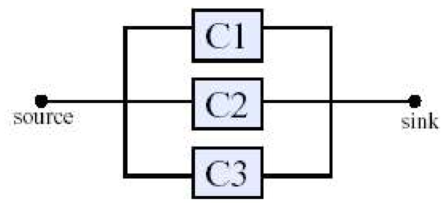
Series:

System fails if any component fails.



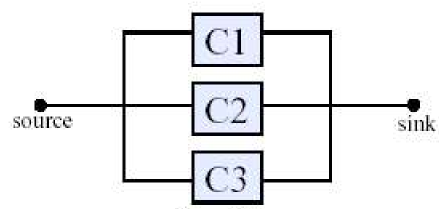
Parallel:

System fails if all components fail.



k of *N*:

System fails if at least *k* of *N* components fail.



2 of 3

Contoh

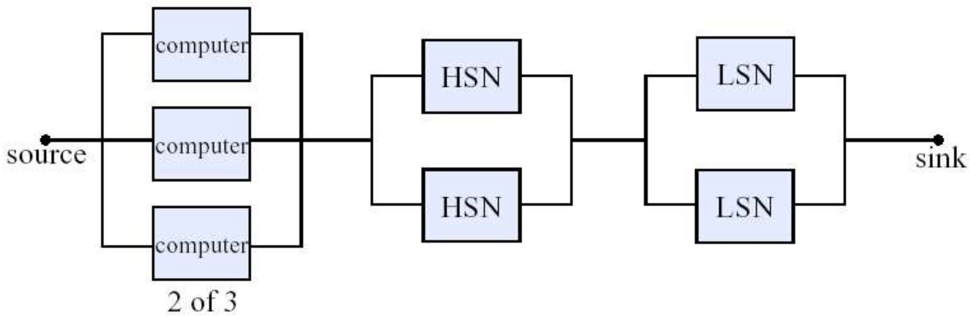
Sebuah arsitektur satelit NASA dalam riset didesain untuk keandalan yang tinggi. Komponen utama sistem komputer termasuk sistem CPU, Jaringan super cepat untuk koleksi dan transmisi data, dan jaringan kecepatan rendah untuk engineering dan kontrol. Satelit gagal (bermasalah) jika ada beberapa sistem utama gagal.

Disana ada 3 komputer , dan sistem komputer gagal jika 2 atau lebih komputer yang ada gagal. Distribusi kerusakan dari sebuah komputer diberikan dengan notasi Fc.

Ini adalah sebuah redundant (2) jaringan kecepatan tinggi, dan sistem jaringan kecepatan tinggi gagal jika kedua jaringan gagal. Distribusi dari sebuah kerusakan jaringan kecepatan tinggi diberikan dengan notasi F_{H}.

Jaringan kecepatan rendah dirancang sama, dengan sebuah distribusi kerusakan $F_{L.}$

Contoh RGB



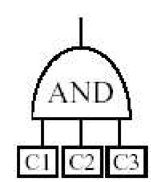
$$F_S(t) = 1 - \left(1 - \left(\sum_{i=2}^{3} \binom{3}{i} F_C^i(t)(1 - F_C(t))^{3-i}\right)\right)\left(1 - (F_H(t))^2\right)\left(1 - (F_L(t))^2\right)$$

Pohon Kegagalan (Fault tree)

- Komponen adalah daun dari pepohonan
- sebuah komponen gagal = nilai logika benar , jika tidak salah
- node didalam pohon adalah boolean AND, OR dan k dari N gerbang
- Sistem gagal jika root adalah benar.

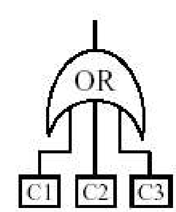
AND gates

true if all the components are *true* (fail).



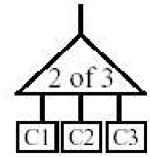
OR gates

true if any of the components are *true* (fail).

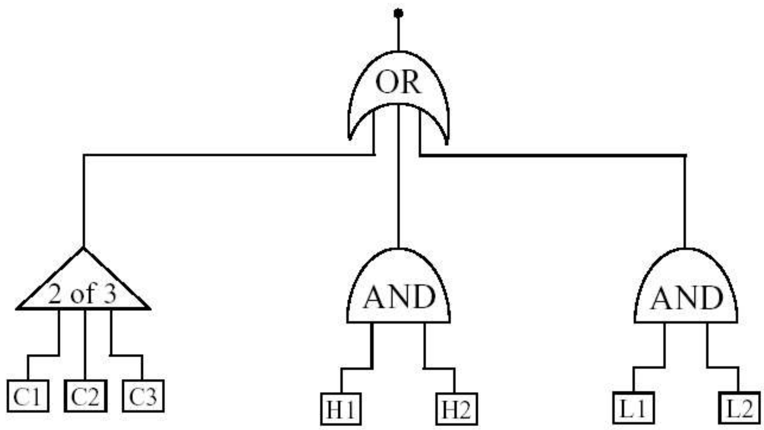


k of N gates

true if at least k of the components are *true* (fail).



Fault Tree Example (Contoh pohon kegagalan)



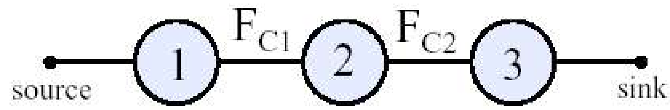
Methode Kombinatorik : Review

Sebuah sistem terdiri dari N komponen dimana waktu kerusakan komponen diberikan dengan variabel acak X1,…………..,Xn, sistem gagal pada waktu S dengan distribusi Fs jika :

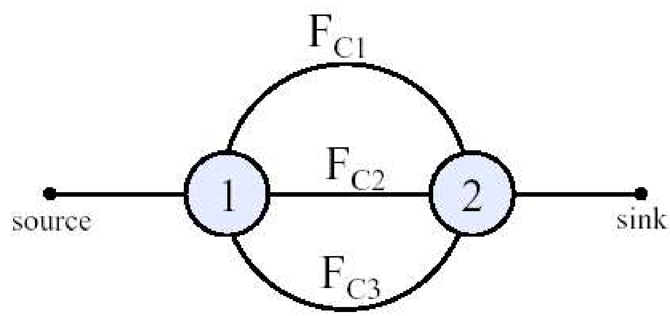
Condition:	Distribution:
all components fail	$F_S(t) = \prod_{i=1}^{N} F_{X_i}(t)$
one component fails	$F_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^{N} \left(1 - F_{X_i}(t)\right)$
k components fail, identical distributions	$F_S(t) = \sum_{i=k}^{N} \binom{N}{i} F_X(t)^i \left(1 - F_X(t)\right)^{N-i}$
k components fail, general case	$F_S(t) = \sum_{g \in G_k} \left(\prod_{X \in g} F_X(t) \right) \left(\prod_{X \notin g} (1 - F_X(t)) \right)$

- Arcs(busur) merepresentasikan komponen dan mempunyai distribusi kerusakan.
- Sebuah kerusakan terjadi jika tidak terjadi hubungan dari sumber ke tujuan (sink).

Can implement series:



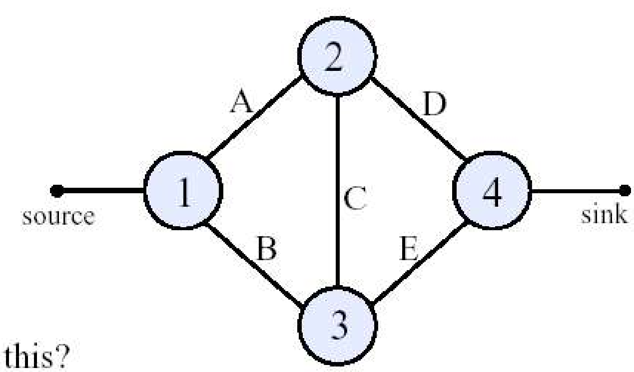
Can implement parallel:



Contoh Keandalan Graph

Keandalan graph dapat diimplementasiakn dengan interaksi yang lebih kompleks.

Sebagai contoh, sebuah jaringan telepon ‘fail / gagal’ jika tidak ada hubungan dari sumber ke tujuan (sink).



How do we solve this?

Jawaban/penyelesaian dengan pengkondisian

Recall that $P[E \mid F] = \dfrac{P[E \cap F]}{P[F]}$

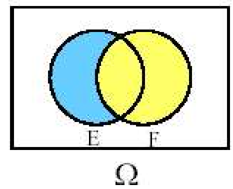
If F and $\overline{F}$ are complementary events, i.e.,

$$F \cup \overline{F} = \Omega \text{ and } F \cap \overline{F} = \varnothing$$

then there is a trick :

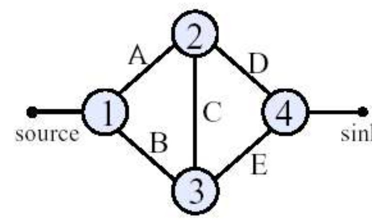
$$P[E] = P[E \cap F] + P[E \cap \overline{F}]$$

$$P[E] = P[E \mid F]P[F] + P[E \mid \overline{F}]P[\overline{F}]$$



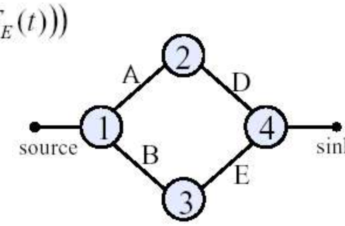
If you can solve $P[E \mid F]$, $P[F]$, $P[E \mid \overline{F}]$, and $P[\overline{F}]$, then you can solve $P[E]$.

Pertama, kondisi sistem pada jalur C telah gagal. Kemudian sistem menjadi AD seri dan paralel dengan BE yang terhubung seri.

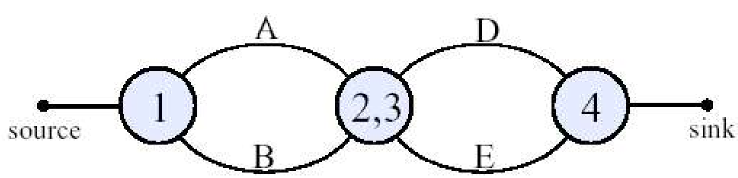


$$F_{S|C\,Fail}(t) = P[S \le t \mid C \le t] = \left(1-\left(1-F_A(t)\right)\left(1-F_D(t)\right)\right)\left(1-\left(1-F_B(t)\right)\left(1-F_E(t)\right)\right)$$

and $P[C \le t] = F_C(t)$



Kedua, kondisi sistem pada jalur C memendek (menyatukan node 2 dan node 3)



$$F_{S|C\,up}(t) = P[S \le t \mid C > t] = 1 - \left(1 - F_A(t)F_B(t)\right)\left(1 - F_D(t)F_E(t)\right),$$

and $P[C > t] = 1 - P[C \le t] = 1 - F_C(t)$

Thus, $F_S(t) = F_{S|C\,Fail}(t)F_C(t) + F_{S|C\,up}(t)\left(1 - F_C(t)\right)$.

Pengaruh keadaan Pohon kesalahan

Ini juga mungkin menggunakan pengkondisian untuk menyelesaikan pohon kesalahan yang lebih kompleks. Jika komponen yang sama timbul lebih dari satu didalam pohon kesalahan, dia melanggar asumsi kerusakan independent. Oleh karena itu , sebuah pengkondisian pohon kesalahan dapat diselesaikan.

Contoh: sebuah komponen C timbul beberapa kali didalam phon kesalahan.

$$F_S(t) = F_{S|C\,Fail}(t)F_C(t) + F_{S|C\,Up}(t)(1 - F_C(t))$$

Dimana S|C gagal diberikan sistem yang mana C telah gagal

Dan S|C terhubung (up) diberikan sistem yang mana C tidak gagal.

Titik Estimasi Reliability / Availability

• Sering , keinginan mengukur dari model reliability adalah reliability pada beberapa waktu t. kemudian, distribusi dari keandalan sistem adalah sangat berlebihan; R(t) adalah hanya sebuah daya tarik.

• kondisi perhitungan sederhana sebab semua yang memerlukan solusi adalah keandalan komponen pada waktu t. solusi kemudian menjadi sebuah perhitungan secara langsung.

• Jika sistem digambarkan didalam bagian dari ketersediaan komponen pada waktu t, kemudian kita bisa menghitung ketersediaan sistem pada jalan yang sama yang mana ketersediaan dihitung. Pembatasan bahwa semua tingkah laku komponen harus di buat independent satu sama lainnya.

Tabel keandalan / ketersediaan

Sebuah sistem terdiri dari N komponen. Keandalan komponen i pada waktu t diberikan dengan notasi Rxi(t) dan ketersediaan komponen i pada waktu t diberikan dengan notasi Axi(t).

Condition	System Reliability	System Availability
system fails if all components fail	$R_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_{Xi}(t))$	$A_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - A_{Xi}(t))$
system fails if one component fails	$R_S(t) = \prod_{i=1}^{n} R_{Xi}(t)$	$A_S(t) = \prod_{i=1}^{n} A_{Xi}(t)$
system fails if at least *k* components fail, identical distribution	$R_S(t) = \sum_{i=k}^{N} \binom{N}{i} (1 - R_{Xi}(t))^i R_X(t)^{N-i}$	$A_S(t) = \sum_{i=k}^{N} \binom{N}{i} (1 - A_X(t))^i A_X(t)^{N-i}$
system fails if at least *k* components fail, general case	$R_S(t) = \sum_{g \in G_k} \left(\prod_{X \in g} (1 - R_X(t)) \right) \left(\prod_{X \notin g} R_X(t) \right)$	$A_S(t) = \sum_{g \in G_k} \left(\prod_{X \in G} (1 - A_X(t)) \right) \left(\prod_{X \notin g} A_X(t) \right)$

Proses modeling

• Model keandalan dibangun hanya setelah pelayanan yang sesuai ditetapkan.

• Model keandalan dibangun untuk menjawab pertanyaan ‘ subsistem apa atau komponen apa yang harus sesuai untuk sistem yang sesuai ?’

• membangun model hirarki ke subsistem.

• penilaian bisa diterima tetapi kondisinya harus jelas.

• jika tidak percaya, mengerjakan analisis dengan kepekaan untuk melihat berapa banyak yang berarti.

Proses model Keandalan (Relaibility Modeling Process)

Hasil dari Sistem yang realistik didalam RDB (reliability block diagram) dan harus diatur secara hirarki.

```
RBD Process(system)
Define the system
Define "proper service"
Create RBD out of components
for each component
    if component is simple
        obtain reliability data of component
    else
        Do RBD Process(component)
end if
Compute reliability of system
Do results meet specification?
Modify design and repeat as necessary
```